Badillo, E., Trigueros, M. y Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS, en C. Azcárate, M. Camacho-machín, Mª T.. González y M. Moreno y (Coords.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisiónde las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (31-51). La Laguna, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna.

Capítulo 2: Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS.

Edelmira Badillo[1], María Trigueros[2] y Vicenç Font[3].

1. Introducción.

En este capítulo se presentan dos aproximaciones teóricas usadas en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del pensamiento matemático avanzado. La Teoría Acción Proceso Objeto Esquema (APOE) y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) han sido utilizados como referentes teóricos en un gran número de publicaciones, de tesis doctorales (de ámbito local e internacional) y en las publicaciones derivadas de estas investigaciones para explicar diferentes fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos. La tendencia actual en las publicaciones en el área evidencia una búsqueda de relaciones entre diferentes teorías. Por ello, encontramos sugerente presentar estos dos referentes y algunos resultados de investigaciones realizadas en el seno del GIDAM usando estos dos marcos y, algunos trabajos recientes que se preocupan por complementar la perspectiva cognitiva del APOE con elementos semióticos, en general, y con las aportaciones que ofrece el EOS, en particular.

El capítulo se encuentra estructurado en cinco apartados. En el apartado 2 se presentan los elementos más relevantes de la Teoría APOE, tanto para la investigación educativa como para la mejora de los procesos de instrucción matemática. El apartado 3 pretende mostrar las diferentes aportaciones a la teoría APOE de las investigaciones desarrolladas desde el GIDAM. Para ello, se ha optado por presentar las tesis doctorales desarrolladas en el GIDAM, resaltando las aportaciones más relevantes y sus publicaciones derivadas. Siguiendo el mismo esquema, en el apartado 4, se presentan los elementos más relevantes del EOS. Y, en el apartado 5, se presentan las diferentes aportaciones de las investigaciones desarrolladas desde el GIDAM al EOS. Finalmente, en el último apartado, a manera de ejemplo, se describen algunos resultados de investigaciones que han comparado estos dos enfoques teóricos, ilustrando las dificultades y potencialidades que presenta su posible uso conjunto.

2. La teoría APOE: un marco para el análisis de los procesos de construcción de conocimiento matemático.

La teoría APOE, ampliamente reconocida y usada en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, se basa en la epistemología de Piaget (Dubinsky, 1991) y se ha desarrollado desde entonces como un modelo cognitivo para entender la manera en la que se construye el conocimiento matemático (Dubinsky, 1996; Asiala et al., 1996). Desde APOE se considera que el mecanismo principal en

[1] Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.
[2] Departamento Académico de Matemáticas. Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM).
[3] Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.

la construcción de este conocimiento es la abstracción reflexiva (Dubinsky, 1991; Arnon et al, 2014). Dicho mecanismo, según las interpretaciones de Piaget en diversas publicaciones, consta de dos partes: (1) La conciencia sobre un objeto matemático y las operaciones sobre dicho objeto, desde un nivel cognitivo inferior de operaciones (de acciones a procesos) hasta un nivel más alto de operaciones (de procesos a objetos) y, (2) la reconstrucción y reorganización del objeto matemático y las operaciones sobre él, en un nivel cognitivo de orden superior que implica operaciones sobre el objeto se encapsulen en esquemas al que se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al, 2014)

2.1. La construcción del conocimiento matemático en APOE.

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos: acción, proceso, objeto y esquema, que son las estructuras mentales que, en el marco de esta teoría, un sujeto realiza para construir significados a partir de una determinada demanda cognitiva (Figura 1). Los mecanismos mentales que permiten hacer estas construcciones son las abstracciones reflexivas: interiorización, coordinación, encapsulación, reversión y tematización. La *acción* se entiende como una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo. Dicha transformación se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso. El *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que éste puede describir los pasos involucrados en la transformación, saltarse algunos e incluso coordinarlos e invertirlos. Cuando el individuo tiene necesidad de hacer operaciones o transformaciones sobre un proceso y reflexiona sobre él, éste se encapsula en un *objeto.* En este caso el sujeto toma conciencia del proceso como un todo, y puede realizar transformaciones (ya sean acciones o procesos) sobre él. Una vez construidos, objetos y procesos el sujeto puede interconectarlos de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados en uno solo; los procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos se organiza de manera más o menos estructurada en lo que en la teoría se le conoce como *esquema y* que el individuo invoca al enfrentar problemas relacionados con su contenido (Asiala et al., 1997; Dubinsky, 1996).

Este modelo teórico describe la construcción del conocimiento matemático por un sujeto mediante la construcción, no necesariamente lineal, de estas estructuras básicas. Los resultados de las investigaciones usando APOE han evidenciado que el uso que un sujeto hace de un concepto matemático ante distintas situaciones problemas es diferente cuando responde mostrando una concepción proceso que cuando muestra una concepción acción, o una concepción objeto (Trigueros, 2005).

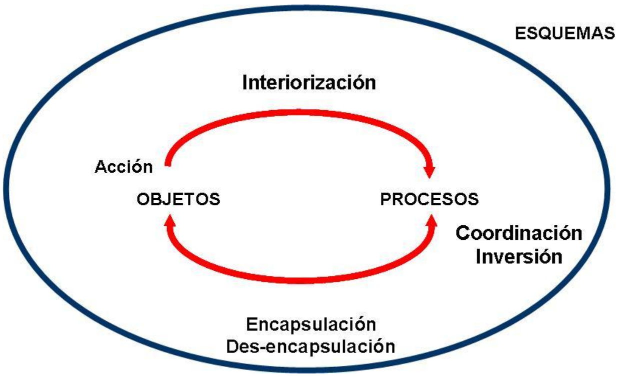


Figura 1. Construcciones mentales y mecanismos involucrados en la construcción de objetos en APOE

Un *esquema* es una construcción cognitiva compleja formada por acciones, procesos, objetos, otros esquemas y sus interrelaciones. Estas estructuras se encuentran relacionadas en la mente de un sujeto, consciente o inconscientemente, y le permiten enfrentarse a diversas situaciones problemas. Las relaciones entre los componentes de un esquema evolucionan de manera dinámica y este desarrollo puede ser distinto en diferentes individuos. Para describir la evolución de los esquemas en APOE se utiliza la triada propuesta por Piaget y García (1982). En el nivel *Intra* de un esquema el individuo se concentra en la repetición de una acción y reconoce algunas relaciones o transformaciones entre acciones sobre diferentes elementos del esquema. El nivel *Inter* está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y objetos que componen el esquema. Cuando el individuo toma consciencia de las relaciones y transformaciones posibles en el esquema y les da coherencia, se considera que el esquema construido está en el nivel *Trans* (Clark, 1997; McDonald et al., 2000; Trigueros, 2005). Distintos esquemas pueden interaccionar entre sí (Baker, Cooley y Trigueros, 2000) y cuando el individuo tiene la necesidad de efectuar operaciones o transformaciones sobre un esquema para encontrar, por ejemplo sus propiedades, el esquema se *tematiza* en un objeto (Cooley, Trigueros y Baker, 2007). En cada etapa de la triada el sujeto reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje el sujeto desarrolla diferentes esquemas, la evolución de cada uno puede ser descrita utilizando la triada. Dichos esquemas cambian constantemente y se encuentran en distintos niveles de evolución. Estos esquemas coexisten, pueden asimilarse unos en otros o interaccionar entre ellos.

2.2. La descomposición genética una herramienta potente para el diseño de procesos de instrucción y para la investigación educativa.

Un aspecto relevante de la Teoría APOE es que proporciona constructos y herramientas, tanto para la investigación educativa como para la enseñanza, basados en un análisis matemático riguroso de los conceptos matemáticos desde el punto de vista de su construcción. Así, APOE propone un ciclo de enseñanza (ciclo ACE) y un ciclo de investigación que incluye dimensiones de análisis sobre prácticas en el aula que permiten mejorar continuamente el modelo de construcción de conocimientos, los procesos de enseñanza y los instrumentos de investigación. En la investigación con APOE se distinguen tres componentes: (1) análisis teórico inicial; (2) diseño de investigación (Asiala et al., 1997) y (3) Obtención y análisis de datos experimentales. Este proceso cíclico, se repite tantas veces como sea necesario (Figura 2), a partir del análisis de los resultados empíricos (Dubinsky, 1991; 2000).

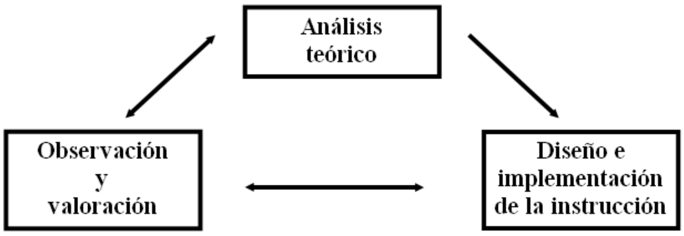


Figura 2. Componentes del ciclo de investigación APOE.

El punto de partida del ciclo de investigación con APOE es el análisis de los conceptos matemáticos focalizado en las construcciones cognitivas que se requieren para su aprendizaje. Mediante este análisis se construye un modelo hipotético denominado *Descomposición genética* del concepto matemático (DG). En ésta se describe una forma en la que un sujeto construye un concepto matemático en términos de las estructuras propias de la teoría y de los mecanismos que un estudiante puede activar cuando lo aprende. Su diseño suele comenzar como una hipótesis preliminar, una DG *preliminar,* para un concepto basada en diferentes fuentes de información (Arnon et al., 2014).

Una DG también puede incluir una descripción de cómo las relaciones entre las acciones, procesos y objetos pueden aparecer, desarrollarse y organizarse en un esquema. La DG es, pues, un modelo de la epistemología y la cognición del concepto matemático de estudio (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

En algunos casos una DG preliminar puede guiar el desarrollo de un tratamiento didáctico. En este caso, su aplicación proporciona una oportunidad para la recopilación de datos. El análisis de los mismos en términos de la DG permite validar las construcciones predichas en ella o cambiarlas en términos de las construcciones observadas de manera experimental. De esta manera la DG preliminar se puede revisar y refinar para utilizarla nuevamente en la instrucción y repetir el ciclo hasta que se considere adecuada (Arnon et al., 2014).

Es importante aclarar que una DG no es única, pueden coexistir más de una DG de un mismo concepto. La validez de una DG proviene del análisis de los datos experimentales (Dubinsky, 1991). Dado que la manera usual de presentar una DG es lineal podría parecer que el concepto se construye linealmente. Esto es una consecuencia de la manera de presentar la DG que no refleja la posibilidad de trayectorias diferentes que se producen en el aprendizaje de un concepto. Finalmente señalamos que una DG no explica lo que sucede en la mente de un individuo ya que probablemente es imposible conocer y predecir si una persona va a aplicar una estructura dada ante una demanda determinada. Una DG sirve como un modelo útil de la cognición, tal y como evidencian los resultados de estudios empíricos que muestran la eficacia de la teoría APOE como una herramienta de análisis y de diseño de instrucción eficaz (Weller et al., 2003).

Si bien algunos críticos apuntan a algunas limitaciones de la teoría APOE, en particular a lo que los autores llaman la primacía de las acciones (Tall, 1999), esta teoría no muestra tal problema. Las distintas estructuras que la componen tienen igual importancia y el hecho de subrayar la importancia de las acciones como posible inicio de la construcción del conocimiento matemático no implica primacía de esta estructura sobre las otras (Czarnocha, et al., 1999). El éxito de la teoría APOE tanto en la investigación como en el diseño de didácticas para enseñar distintos conceptos matemáticos muestra que la descripción que la teoría hace sobre la construcción del conocimiento matemático es pertinente y útil en la enseñanza (Arnon, et al., 2014; cap. 12).

3. Aportaciones de investigaciones en el seno del GIDAM al APOE.

Numerosas investigaciones, tanto a nivel internacional como en el seno del GIDAM, han usado APOE para el análisis cognitivo de la comprensión de diferentes conceptos del pensamiento matemático avanzado (Arnon et al., 2014).

Las investigaciones dentro del GIDAM que han usado APOE, las podemos clasificar en dos grandes grupos: (1) centradas en el análisis de la comprensión de conceptos de alumnos de secundaria, bachillerato y universitarios y, (2) centradas en el análisis de la comprensión del conocimiento y la práctica profesional de profesores de matemáticas.

Dentro del primer grupo de investigaciones, los autores han considerado que, dada la complejidad de los conceptos matemáticos involucrados, el análisis de la construcción en términos de acciones, procesos y objetos es insuficiente porque no contempla las relaciones entre estas estructuras. La consideración de esas relaciones así como aquellas con esquemas construidos para diferentes conceptos matemáticos, tal y como afirma Trigueros (2005), les ha llevado a considerarlos como esquemas y a describir los niveles de desarrollo en términos de la tríada. A continuación se presenta una síntesis de este primer grupo de investigaciones.

En la investigación realizada por Sánchez-Matamoros (2004) y las publicaciones derivadas (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006, 2007, 2008; García, Sánchez-Matamoros y Llinares, 2011) se analiza el desarrollo del esquema derivada de estudiantes de bachillerato (16-18 años) y primer año de la universidad mediante un estudio en el que se utilizó un cuestionario de 12 problemas respondido por 150 estudiantes y una entrevista en profundidad sobre el proceso de resolución. Los estudios parten de la base de los resultados de investigaciones previas que utilizan APOE sobre el desarrollo de un esquema usando la triada. Las aportaciones más relevantes de este estudio son de dos tipos. En relación al análisis del concepto de derivada: (1) la caracterización de los elementos matemáticos de esta noción considerando los modos de representación y el carácter puntual y global de la misma; (2) la identificación de tres tipos de relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. En relación al proceso de construcción del significado del esquema: (1) la caracterización de los niveles de desarrollo del esquema en términos de las relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos y en función del uso que los estudiantes hacían de ellos en la resolución de problemas; y, (2) la caracterización de la complejidad asociada a los mecanismos que intervienen en la construcción de un esquema en términos de la capacidad de los estudiantes para transferir explícitamente la relación entre una función y su primera derivada a la función derivada y la segunda derivada, y así sucesivamente. Aportan evidencias empíricas de que diferentes características de esquemas tematizados se manifiestan a través de diferentes estructuras subyacentes (García, Sánchez-Matamoros y Llinares, 2011)

Codes (2010) analiza la comprensión del concepto serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de Ingeniería técnica en informática. Este estudio es el único que incluye el ciclo de investigación que propone APOE: (1) Proponen una DG para la convergencia de serie numéricas; (2) Diseñan un proceso de instrucción tomando elementos del ciclo de enseñanza ACE (tareas; uso de software de cálculo simbólico para apoyar a los estudiantes en la construcción diseñada en la DG; uso de trabajo colaborativo en el aula) y, (3) Describen los niveles de comprensión del concepto que exhiben los estudiantes en términos de la triada, llegando a definir subniveles dentro de los niveles (Intra e Inter) del esquema. Esta investigación concluye que uno de los aspectos clave en las diferencias de los niveles de comprensión es la concepción de proceso iterativo infinito que manifiestan los estudiantes asociada a la coordinación de los elementos matemáticos con los que se construye el concepto de serie numérica.

Por su parte, Boigues, Llinares y Estruch (2010) caracterizan el desarrollo del esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería relacionados con las ciencias de la naturaleza usando una métrica fuzzy para determinar el grado de desarrollo del esquema en los niveles de la triada. Participaron 189 estudiantes de primer curso que estaban cursando la asignatura Fundamentos Matemáticos y ya habían estudiado la integral definida antes de la recogida de datos. Los datos proceden de las respuestas a un cuestionario y de una entrevista posterior sobre el proceso de resolución. Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia del valor n de la partición, como una manifestación de la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el paso al límite que configura el significado de la integral definida.

Finalmente, Aldana (2011) y González y Aldana (2010) analizan el desarrollo del esquema del concepto de integral definida de estudiantes universitarios. Participaron 11 estudiantes de tercer año del programa de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia). Todos los estudiantes habían recibido una instrucción previa sobre el concepto de Integral definida no basada en el ciclo de enseñanza (ACE). Para describir los niveles de comprensión del concepto de integral definida, inicialmente, se estableció una DG preliminar. Posteriormente, recogieron información utilizando tres instrumentos distintos: un cuestionario, una entrevista en profundidad sobre el proceso de resolución y un mapa conceptual del concepto de integral definida. Los resultados muestran dos aspectos relevantes: (1) los niveles de desarrollo del esquema del concepto dependen del tipo de relaciones lógicas que es capaz de establecer el estudiante y de los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que saben utilizar y, (2) la necesidad de caracterizar subniveles de desarrollo del esquema del concepto de Integral dada la evidencia de alumnos en un mismo nivel de desarrollo que no son capaces de establecer idénticas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos ni entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

El segundo grupo de investigaciones se centran en el análisis de la comprensión del conocimiento y la práctica profesional de profesores de matemáticas. Este último grupo de investigaciones dentro del GIDAM aporta aspectos relevantes para aplicaciones de APOE al estudio del profesor. Se han diferenciando dos focos de análisis: (a) el análisis del profesor de matemática como sujeto que usa y construye conocimiento *en* y *sobre* la práctica (Badillo, 2003) y, (b) el análisis del profesor como sujeto que organiza su práctica para guiar la construcción de conocimiento matemático de sus alumnos en el aula (Gavilán, 2005; Aldana, 2011).

En la investigación de Badillo (2003), la teoría APOE se usa para el análisis matemático del concepto de derivada (DG) y para su aplicación posterior, en el análisis de los niveles de comprensión del concepto que exhiben los profesores. En este estudio se parte de la estructura y descripción del conocimiento profesional del profesor y la forma cómo éste lo estructura en su agenda de trabajo centrándose en la caracterización de las tareas que proponen para enseñar y evaluar este concepto matemático en sus alumnos. Se diseñaron cinco estudios de casos de profesores de matemáticas de bachillerato (16-18 años) de Colombia. La aportación más relevante es una nueva propuesta de DG para el concepto de derivada, elaborada a partir de la propuesta por Asiala et al. (1997). Dicha DG incorpora, por un lado, la necesidad de integrar los significados asociados a los objetos derivada en un punto (*f'(a)*) y la función derivada (*f'(x)*) en diferentes contextos (velocidad, pendiente de una recta y tasa de variación), y por otro lado, la complejidad semiótica asociada a las relaciones entre *f'(a)* y *f'(x).* Los resultados muestran que la comprensión de los profesores de estos dos macro objetos, *f'(a)* y *f'(x),* puede estar relacionada con la estructura de los esquemas gráfico y algebraico de los mismos, y con los conflictos semióticos asociados (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

Por su parte, en Gavilán (2005) y las publicaciones derivadas (Gavilán, García y Llinares, 2007a y b; García, Gavilán y Llinares, 2012) se describe y explica la práctica del profesor desde el punto de vista de la construcción del conocimiento matemático que busca potenciar en sus estudiante. Para ello, proponen una investigación basada en el estudio de dos casos de profesores de bachillerato (16-18 años). La aportación más relevante de este estudio para la teoría APOE y para la línea de investigación sobre el profesor es que introducen y validan empíricamente la noción de *modelación de un mecanismo de construcción de conocimiento* clave en el análisis de la práctica del profesor y su relación con la perspectiva del profesor. Para la caracterización de la práctica del profesor tienen en cuenta dos aspectos: (1) el uso que el profesor hace de los sistemas de representación y de los elementos matemáticos en la modelación de los mecanismos de construcción y, (2) la organización que el profesor hace de los conceptos y cómo los relaciona en la modelación de la descomposición genética (Gavilán, García y Llinares, 2007b). Los resultados muestran la importancia de complementar perspectivas cognitivas sobre las concepciones del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con perspectivas socioculturales para explicar la práctica del profesor. De igual manera, aportan evidencias empíricas sobre la forma de elaborar y hacer operativo el constructo teórico que proponen, a la vez que sugieren un medio, como son las "viñetas", para teorizar la práctica del profesor. Esto posibilita y valida la doble integración de perspectivas teóricas.

Finalmente, Vargas (2012), analiza la práctica profesional de docentes universitarios al enseñar la función exponencial. Para ello, plantea el estudio en profundidad de dos casos con el propósito de analizar las fases de planificación y de gestión en el aula de los dos profesores, tomando como referencia los mecanismos de construcción de un concepto matemático (propuestos por APOE) y la modelación de la descomposición genética de un concepto (Gavilán, 2005). Una aportación de este estudio es la construcción de una DG de la función exponencial. Los resultados muestran que la modelación de la descomposición genética de la función exponencial y la perspectiva de la práctica de los profesores están constituidas por tres componentes integrados: (1) la forma en que el profesor usa los instrumentos de la práctica (las tareas que propone a sus alumnos, los sistemas de representación usados, y el discurso matemático generado en el aula); (2) en la manera en que el profesor organiza los distintos elementos matemáticos del concepto y, (3) la manera en que establece relaciones entre ellos.

4. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática: un marco integrativo para la Didáctica de la Matemática.

Entre los aportes que ha realizado el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) a la Educación Matemática en este trabajo nos centraremos en: (1) La reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia y significado a partir de las prácticas; (2) su modelo de análisis de procesos de instrucción.

4.1. Los objetos matemáticos, su emergencia y significado a partir de las prácticas

En el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se considera que el proceso por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y que deben ser distinguidos, al menos, dos niveles. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (llamados objetos primarios). Con relación a la naturaleza de dichos objetos, en el EOS de acuerdo con la filosofía convencionalista de las matemáticas de Wittgenstein (1987), se considera que el tipo de existencia de las definiciones, proposiciones y procedimientos es el que tienen las reglas convencionales. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (gramaticales) para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos, aunque lo pueda parecer.

La figura 3 (Font y Contreras, 2008, p. 35) muestra algunas de las nociones teóricas propuestas por el EOS sobre la emergencia de los objetos matemáticos primarios a partir de las prácticas matemáticas (Font, Godino y Gallardo, 2013). A partir de las prácticas emergen los diferentes tipos de objetos primarios (lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones, problemas y argumentos) organizándose en configuraciones epistémicas o cognitivas, según se adopte un punto de vista institucional o personal (hexágono interior de la figura 3).

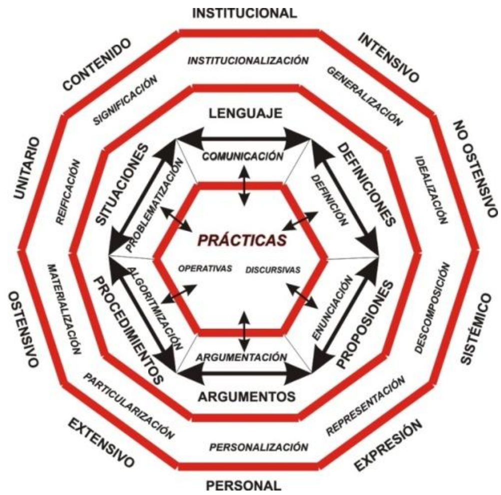


Figura 3. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático.

Los problemas contextualizan y desencadenan la actividad matemática; el lenguaje (notaciones, gráficos, etc.) representa a las otras entidades y sirve como herramienta para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que relacionan las definiciones. Finalmente, estos objetos primarios, según el juego de lenguaje que se considera (Wittgenstein, 1953) se pueden mirar desde cinco facetas duales (decágono exterior de la figura 3): personal/institucional, unitario/sistémico, expresión/contenido, ostensivo/no-ostensivo y extensivo/intensivo. Tanto las dualidades como los objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos (en cursiva) de la figura 3.

Para explicar cómo emergen los objetos primarios, se usa la metáfora "subir una escalera". El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Los nuevos objetos primarios aparecen como resultado de la práctica matemática y se convierten en objetos primarios institucionales gracias, entre otros procesos considerados en la figura 3 (incluyendo reificación e idealización), a procesos de institucionalización que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje estudiado.

En el EOS se considera también un segundo nivel de emergencia. El objeto derivada (por ejemplo) emerge como una referencia global asociada a diferentes configuraciones epistémicas que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos −en los cuales la derivada se ha interpretado como límite, como pendiente de la recta tangente o como velocidad instantánea, además como un operador que transforma una función en otra-, lo cual lleva a entender que la derivada se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc. El resultado, según el EOS, es que se considera la existencia de un objeto, llamado derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones.

En el EOS, el objeto que juega el papel de referencia global se puede considerar como único por razones de simplicidad y, a la vez, como múltiple ya que, metafóricamente, se puede decir que estalla en una multiplicidad de objetos primarios agrupados en diversas configuraciones. La perspectiva de la emergencia de los objetos a partir de las prácticas que propone el EOS pone de relieve la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos y la necesaria articulación de los elementos en los que estalla dicha complejidad. El EOS ofrece una explicación de la complejidad en términos de configuraciones epistémicas y, al mismo tiempo, cómo esta pluralidad de configuraciones de puede mirar de manera unitaria.

La pregunta ¿cuál es el significado de un objeto matemático? se intenta responder en el EOS teniendo en cuenta básicamente las facetas expresión-contenido y unitario-sistémico. Desde la perspectiva expresión-contenido el significado de un objeto primario que se considera como “expresión” en una función semiótica será el “contenido” de dicha función semiótica. Desde la perspectiva unitario-sistémico el “significado” de un objeto, según el contexto, puede ser una definición (perspectiva unitaria) o bien puede ser el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (perspectiva sistémica). Desde esta última perspectiva, en el EOS se entiende el significado de un objeto que juega el papel de referencia global, por ejemplo el objeto derivada, como el sistema de pares (configuración de objetos primarios, prácticas que posibilita) de los cuales se considera referencia global. Dicha caracterización permite considerar una tipología de significados institucionales y personales de un objeto matemático.

Con relación a los significados institucionales se propone tener en cuenta los siguientes tipos: (1) Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente; (2) Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes; (3) Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio; y, (4) Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos: (1) Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático; (2) Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; y, (3) Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la práctica institucional.

4.2. Modelo de análisis didáctico.

El EOS (Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011) considera cinco tipos o niveles de análisis de procesos de instrucción: (1) Identificación de prácticas matemáticas; (2) Elaboración de las configuraciones de objetos primarios y procesos matemáticos; (3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; (4) Identificación del sistema de normas y metanormas; y, (5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas hechas en un proceso de instrucción matemático. El análisis didáctico debe progresar desde las prácticas matemáticas necesarias (nivel 1) a los objetos primarios y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2). El tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de instrucción (niveles 1 y 2), sino también otras dimensiones de estos procesos (cognitiva, afectiva, etc.). El cuarto nivel de análisis estudia dicha trama.

Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica. Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

5. Investigaciones en el seno del GIDAM relacionadas con el EOS.

En el marco del EOS se han realizado investigaciones sobre la emergencia de los objetos matemáticos del cálculo diferencial e integral. Con relación a la integral, se ha investigado, entre otros aspectos, sobre: (1) la caracterización de la complejidad ontosemiótica de textos sobre la integral y los conflictos semióticos potenciales que se pueden producir en los alumnos que los usen (Contreras y Ordóñez, 2006); (2) la dialéctica entre los significados personales e instituciones de la integral definida en un proceso de instrucción y de cómo este último significado está determinado en parte por las Pruebas de Acceso a la Universidad (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010); (3) la caracterización de la dialéctica entre los significados personales e instituciones de la integral definida en la formación de profesores de matemática en Brasil (dos Santos, 2012) y, (4) el diseño de secuencias de tareas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (Robles, Telechea y Font, 2014) utilizando los criterios de idoneidad propuestos por el EOS.

Con relación al límite, se ha investigado, entre otros aspectos, sobre: (1) la descripción de los significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional (Contreras y García, 2011; y, (2) la descripción y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción sobre la noción de límite. En Contreras, García y Font (2012) se describe una parte del proceso de estudio de una clase de primero de Bachillerato sobre el objeto límite de una función, por medio de las trayectorias epistémica e instruccional, dedicando especial atención a la descripción y explicación de los conflictos semióticos detectados y a las técnicas cronogenéticas y topogenéticas detectadas en clase. Dicha descripción se utiliza para realizar una valoración parcial de la idoneidad del proceso de estudio.

También hay que resaltar investigaciones sobre procesos intuitivos (Malaspina y Font, 2010) y procesos metafóricos (Acevedo, 2008; Font, Bolite y Acevedo, 2010) relacionados con los objetos del análisis infinitesimal (problemas de optimización en el primer caso y funciones en el segundo).

Por limitaciones de espacio a continuación explicamos con más detalle solo algunas de las investigaciones relacionadas con las derivadas que han utilizado como marco teórico el EOS. En Font y Contreras (2008) se argumenta que para comprender una definición de función derivada como la siguiente, que se halla en un libro dirigido a estudiantes españoles de bachillerato (16-17 años), un alumno hipotético tiene que poner en funcionamiento (plausiblemente) una trama de funciones semióticas como la que se describe en la figura 4:

> « 1. Función derivada de una función: Consideremos ahora, dada una función *y* = *f*(*x*), otra función nueva que asocia a cada punto *a* del dominio de *f* su derivada *f ´*(*a*) cuando exista. Esta función es la función derivada de *y* = *f*(*x*) y se representa con *f'*(*x*) o *y'*.
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ »

Se interpreta la comprensión de la definición de función derivada por un sujeto en términos de las funciones semióticas (FS) que éste debe establecer y se considera como expresión o contenido de dichas funciones semióticas la faceta extensiva-intensiva (particular-general) de los objetos matemáticos. En concreto, se considerarán la tipología de funciones semióticas de la tabla 1.

Esta tipología de 8 funciones semióticas surge de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso y se utiliza para establecer la trama de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprender la definición anterior (figura 4). Las dos últimas FS, representadas con un interrogante, no son propiciadas explícitamente por el autor del texto, para que se pueden establecer es necesario que el alumno por su cuenta complete la trama de FS con las funciones semióticas que aparecen señaladas con asteriscos).

Estas funciones semióticas tienen en común que todas ellas son de tipo representacional, en el sentido de que facilitan que la expresión se considere una representación del contenido, pero además pueden ser de tipos diferentes según que la expresión o el contenido sean extensivos (particulares) o intensivos (generales) y según cuál sea el criterio de correspondencia entre la expresión y el contenido. Por ejemplo, la FS2.1 por una parte es representacional, en el sentido de que el caso particular se puede tomar como un representante de la clase, pero por otra parte es de tipo metonímico (parte-todo) ya que un extensivo (una parte) se toma por el todo (la clase), en este caso el criterio de correspondencia es el de “pertenencia”. En algunos casos las funciones semióticas son exclusivamente representacionales (por ejemplo, la FS1.2 de la figura 4 que relaciona *y´* con *f´*(*x*). En Font y Contreras (2008, p. 43-44) se justifica la plausibilidad de dicha trama con argumentos como los siguientes:

> "(…) cuando, en la definición de derivada se dice "*dada una función y = f(x)*", hay que tener en cuenta que el autor del texto pretende dar la definición de la función derivada de cualquier función. Para ello, lo primero que hace es dirigir la atención del alumno a "una función", es decir, se pasa de lo general a lo particular y, por tanto, se ha introducido un objeto particular mediante una función semiótica intensivo/extensivo (una F3.1)."
>
> "Cuando en la definición se dice "*…que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada f '(a) cuando exista*.", a un valor concreto *a* se le hace corresponder otro valor concreto *f* '(*a*). Por tanto, hemos considerado una función semiótica del tipo FS1.2.

Tabla 1. Tipos de Funciones Semióticas

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

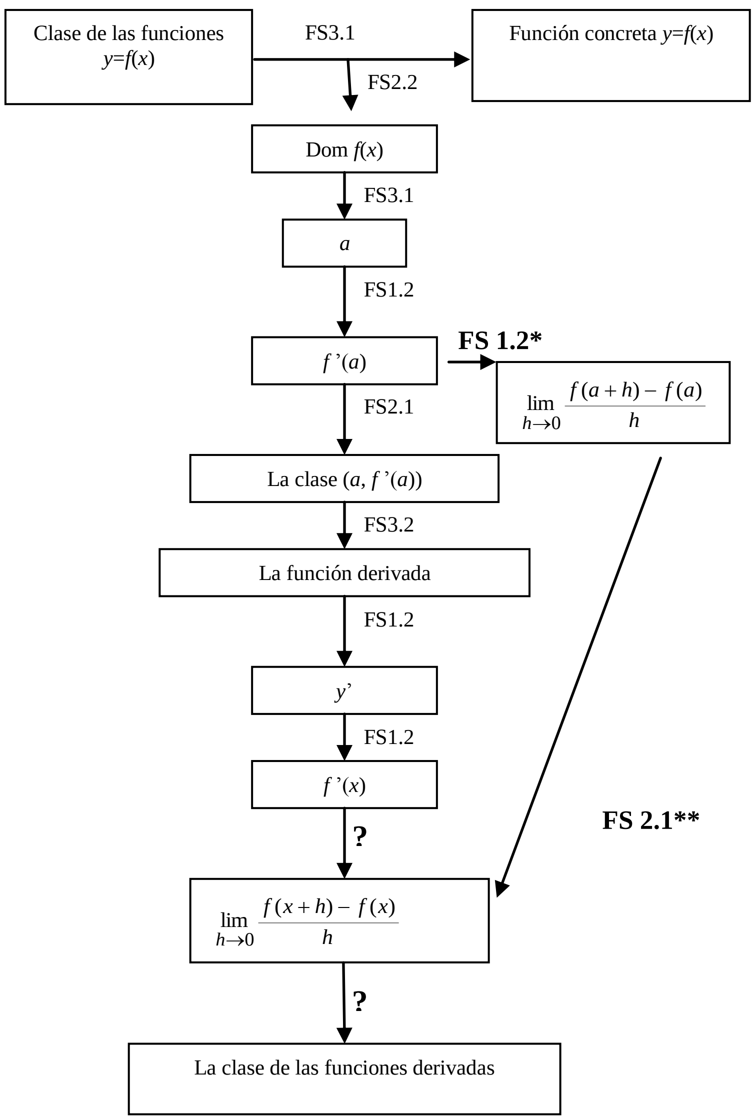
1) FS1. Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional (FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase; FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase).

2) FS2. Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional (FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece; FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece).

3) FS3. Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional (FS3.1 Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase; FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase).

4) FS4. Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional (FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente; FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente).

Figura 4. Trama de funciones semióticas



Para el caso de la derivada, el EOS propone una explicación del siguiente fenómeno observado: la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos que inician sus estudios sobre la derivada cuando han de distinguir la derivada en un punto de la función derivada. La explicación según este enfoque es la poca importancia que se da a la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada en los textos que se proponen a los alumnos.

Otro problema didáctico es que, en el momento del primer encuentro con la función derivada, encontrar la expresión analítica de la derivada a partir de la definición por límites resulta complicado para algunas funciones elementales, (por ejemplo la función seno). En Font (2000 y 2005) se concluye que en el proceso de cálculo de *f'* hay que considerar tres fases: (1) Traducciones entre las distintas formas de representar *f*; (2) El paso de una forma de representación de *f* a una forma de representación de *f';* y, *(*3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f´*. Entender el cálculo de la función derivada como un proceso en el que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación. En Font (2000) se analiza la complejidad semiótica de tres maneras diferentes de introducir la función derivada: (1) mediante la definición por límites; (2) hallando una condición que cumplan todas las tangentes y, a partir de ella, calcular dicha función derivada; y, (3) calcularla por medio de los valores de la derivada en diversos puntos, dados en una tabla. La comparación de las tramas de funciones semióticas implícitas, sobre cada una de las tres maneras de introducir la función derivada, permite concluir que la definición de *f'* como un límite es la que presenta mayor complejidad semiótica, ya que implica funciones semióticas que presentan notables dificultades para los alumnos.

En el EOS se considera que las secuencias didácticas para afrontar los dos problemas didácticos comentados anteriormente deben tener en cuenta la complejidad del objeto derivada mediante: (1) un análisis a priori que ponga de manifiesto las diferentes configuraciones epistémicas cuya referencia global es el objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011), y la trama de funciones semióticas que se han de activar para relacionar entre sí los elementos de las configuraciones y las configuraciones entre ellas; y, (2) tener en cuenta esta complejidad ontosemiótica en la implementación de la secuencia didáctica.

En Robles, Del Castillo y Font (2011) se presenta una investigación que asume como punto de partida la explicación que propone el EOS de las dificultades de comprensión de la derivada en un punto y de la función derivada, y propone una secuencia didáctica para intentar superarlas. El objetivo es el diseño, implementación y valoración de la implementación de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora que promueve la construcción de significado en torno a la función derivada. Se trabajó con alumnos del primer curso de Cálculo Diferencial e Integral de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir, desde la noción de linealidad local y con la ayuda de un software interactivo, una primera introducción a este objeto matemático que favorezca su tratamiento posterior a través de límites.

Aparece, pues, el problema de diseñar, implementar y valorar la idoneidad de la secuencia implementada y, si es el caso, justificar que se trata de una mejora

La secuencia didáctica tiene por objetivo que, a partir de la gráfica de *f*, mediante una construcción visualmente convincente de la recta tangente desde la noción de linealidad local, el alumno obtenga la tabla de *f ´*, construya la gráfica correspondiente y, finalmente, identifique la expresión analítica respectiva. Se utiliza el Applet Descartes como herramienta que posibilita la visualización de la linealidad local y cuyos recursos visuales facilitan que el alumno se ponga en contacto con dos nociones esenciales: la recta tangente como la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia, y la no derivabilidad puntual de una función. Es importante precisar que no se propone eludir el tratamiento a través de límites en la construcción de la derivada, sino brindar al estudiante una experiencia interactiva que contribuya a dar sentido a la definición formal a abordar posteriormente.

Con relación al proceso de instrucción investigado, pudo apreciarse un nivel de *idoneidad didáctica* satisfactorio. El análisis de los diferentes criterios de idoneidad parciales, desde las perspectivas a priori y a posteriori, aportó una visión panorámica que permite percibir que, aunque los conflictos semióticos potenciales sean identificados a priori y en función de ello el proceso de instrucción se diseñe de tal manera que dichos conflictos se puedan superar, la aparición de conflictos semióticos en la implementación resulta inevitable, y constituye la explicación de la falta de consistencia de los significados personales de algunos estudiantes respecto a los significados pretendidos.

6. Tendencias actuales de integrar aportaciones de APOE y EOS en el análisis de prácticas matemáticas.

En la Didáctica de la Matemática hay actualmente una tendencia a encontrar posibles relaciones entre distintas teorías y a compararlas. En particular, y en relación al tema de este capítulo se ha iniciado un esfuerzo para buscar posibles conexiones entre la Teoría APOE y el EOS. Dicho interés está relacionado con una aparente necesidad de un desarrollo del APOE con aportes de teorías semióticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Font, Malaspina, Giménez y Wilhelmi, 2011; Font, Montiel, Vidakovic y Wilhelmi, 2011; Trigueros y Martínez-Planell, 2010) y con el hecho de que en ambas teorías interviene un componente cognitivo importante.

El punto de partida para buscar conexiones entre el EOS y la teoría APOE es la indagación sobre el uso de la noción de "objeto matemático" en ambas teorías (Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2012; Font, Badillo, Trigueros y Rubio, 2012). Dos aspectos relevantes para abordar esta temática son: (1) el interés que ha tenido para la educación matemática las cuestiones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, sus diversos tipos, los procesos de constitución y formas de participación de los mismos en la actividad matemática y, (2) el hecho de que el EOS y el APOE son ejemplos de un grupo de teorías que usan el término objeto matemático como un constructo relevante de su marco teórico. Para concretar este diálogo se partió de una DG desarrollada desde APOE para el concepto de derivada que fue posteriormente analizada desde el punto de vista del EOS con el fin de desentrañar algunos aspectos implícitos en los mecanismos de APOE relacionados con la emergencia de los objetos y así entender mejor su complejidad y la posible relación entre los objetos mentales y los matemáticos (tabla 2).

En la DG que se propone, la encapsulación aparece primero en 3a y 3b (tabla 2). El punto 3a es el mismo que se propone en la DG de de Asiala et al., en cambio el punto 3b se ha modificado sustancialmente con relación a dicha DG "3b. Analítico: encapsulación del proceso del punto 2b para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra" (Asiala et al., 1997, p. 426-427). En nuestro intento de precisar la DG de Asiala et al., en el punto 3b, se ha incorporado una aclaración en forma de definición implícita del objeto que resulta de la encapsulación.

1a. Gráfico-analítico: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante, a través de los dos puntos; junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos
1b. Algebraico-numérico: la acción de calcular la tasa media de variación entre el punto y otro punto "próximo" $\left(m=\overline{V}=TMV=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$
2a. Gráfico-analítico: interiorización de las acciones del punto *1a* en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más
2b. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación $\left(m=\overline{V}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$, cuando b$\rightarrow$a; en un proceso único, a medida que la diferencia entre los intervalos se hacen más y más pequeños. Esto es a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero
3a. Gráfico-analítico: encapsulación del proceso del punto *2a* para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función.
3b. Algebraico-numérico: encapsulación del proceso del punto *2b,* de calcular las tasa medias de variación $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$cuando b$\rightarrow$a, para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra como el $\left(\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)\right)$
3c. Coordinación gráfica y algebraica de los procesos de construcción 2a y 2b de la tasa instantánea de variación en un punto.

Tabla 2. Fragmento de la DG de la derivada que incorpora aportaciones semióticas (Font, Badillo, Trigueros y Rubio 2012)

En el paso de la acción al proceso y su posterior encapsulación como objeto, desde la mirada que ofrece el EOS, intervienen muchos aspectos que informan de su complejidad. Primero, el alumno debe comprender que las acciones ejecutadas se pueden realizar de acuerdo a un determinado procedimiento (una regla que dice cómo se deben hacer las acciones). En este momento, ya se produce un determinado nivel de reificación, en el sentido que el procedimiento se puede tratar como una unidad (un objeto, un todo). A continuación, el alumno debe considerar un nuevo objeto, el resultado del proceso, y por último debe comprender el significado de la definición que informa de la naturaleza del nuevo objeto. En la teoría APOE este tránsito se considera también complejo, pero a diferencia de EOS, no se considera que un procedimiento es un objeto cognitivo, sino un proceso; el objeto en APOE sería únicamente el resultado de la encapsulación de un proceso. Sobre el nuevo objeto se pueden ejercer acciones. La mirada que aporta el EOS sobre la encapsulación permite apreciar que en ésta se produce un cambio de naturaleza doble, por una parte se pasa de proceso a objeto (primario según el EOS), tal como señala el APOE, pero por otra parte, se cambia la naturaleza del objeto primario (por ejemplo, en el primer caso considerado se pasa de un procedimiento a una definición).

En este análisis se encontraron relaciones entre el mecanismo de encapsulación de APOE y la emergencia de objetos primarios en el EOS, poniendo de manifiesto la complejidad del mecanismo en el que hay que considerar objetos primarios de naturaleza diferente y la intervención de una densa trama de FS relacionadas sobre todo con la dualidad extensivo/intensivo. Dicha complejidad se puede resumir en el esquema siguiente:

> Generación de una sucesión de tasas medias de variación que se acercan al límite f'(a) (procedimiento) → Clase de $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ con $b \to a$ (aplicación de las dualidades unitario/sistémico y extensivo/intensivo) → Un objeto (un número) diferente a la clase anterior $\left(\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)\right)$ (definición) → el nombre "tasa instantánea de variación" (objeto notacional).

Al considerar el mecanismo de tematización de APOE se encontró una relación con el segundo nivel de emergencia en el EOS dado que el objeto que resulta de la tematización juega el papel de referencia global de un conjunto de representaciones semióticas (Font, Badillo, Trigueros y Rubio, 2012).

Los resultados de esta investigación permiten establecer una conexión parcial sobre el uso que hacen ambas teorías del término "objeto matemático". Tal como se ha dicho, en el APOE, hay básicamente dos usos del término objeto. Se considera como un objeto el resultado de la encapsulación de un proceso o bien el resultado de la tematización de un esquema. Nuestra conclusión es que la noción de encapsulación del APOE se relaciona con la noción de emergencia de un objeto primario en el EOS, mientras que la noción de tematización (aspecto no tratado en este trabajo) estaría relacionada con la noción, considerada en el EOS, de segundo nivel de emergencia de un objeto matemático.

Agradecimientos:

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura AC y al Instituto Tecnológico Autónomo de México. Trabajo realizado en el marco de los proyectos: (1) REDICE12-1980-02, financiado por el Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat de Barcelona y (2) EDU2012-32644, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias bibliográficas:

ACEVEDO, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones.* Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, España.

ALDANDA, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría APOE*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., FUENTES, S. R., TRIGUEROS, M., Y WELLER, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer, Berlin.

ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D. J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. Y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education.* 2, 1-32.

ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., Y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior,* 16 (4), 399-430.

BADILLO, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

BADILLO, E.; AZCÁRATE, C. Y FONT, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

BAKER, B., COOLEY, L., Y TRIGUEROS, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 31, 1-23.

BOIGUES, F.; LLINARES, S. Y ESTRUCH, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Relime*, 3 *(3)*, pp. 255-282. ISSN 1665-2436.

CLARK, J., CORDERO, F. COTTRILL, J., CZARNOCHA, B., DEVRIES, D., ST. JOHN, D., TOLIAS, G. Y VIDAKOVIÉ, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior. 16*, 345-364.

CODES, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

CONTRERAS, A. Y GARCÍA, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime),* 14 (3), 277 - 310.

CONTRERAS, A., GARCÍA, M. Y FONT, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, 26(*42B*), 667-690.

CONTRERAS, A. Y ORDÓÑEZ, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime),* 9(*1*), 65-84.

CONTRERAS, A., ORDÓÑEZ, L. Y WILHELMI, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (*3*), 2010.

COOLEY, L. TRIGUEROS, M. Y BAKER, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38 (*4*), 370-392.

CZARNOCHA, B., DUBINSKY, E., PRABHU, V., VIDAKOVIC, D., (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel,* 1, 119–126.

DOS SANTOS, E, C. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional.* Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

DUBINSKY, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press, pp. 95-123.

DUBINSKY, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* Vol. 8 (*3*), 24-41.

DUBINSKY, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 3*(*1*), 47-70.

FONT, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis docotral, Universitat de Barcelona, España.

FONT, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica del análisis, en Maz, A.; Gómez, B. y Torralba, M.. (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de la Investigación en Educación matemática (SEIEM)* (pp.109-128). Universidad de Córdoba, España.

FONT, V., MALASPINA, U., GIMENEZ, J. Y WILHELMI, M. (2011). Mathematical objects through the lens of three different theoretical perspectives. In T. Rowland et al. (Eds.), *Proceedings of the VII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp, 2411-2420).Rzsézow, Poland: University of Rzsézow.

FONT, V., GODINO, J. D., Y GALLARDO, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82 *(1*), 97-124.

FONT, V.; MONTIEL, M.; VIDAKOVIC, D. Y WILHELMI, M. R. (2011). Analysis of Dimensional Analogy by Means of Different Theoretical Perspectives. In Roberta V. Nata (Ed.), *Progress in Education*, Volume 19 (pp. 39-76). Hauppauge, NY: Nova Publishers.

FONT, V., TRIGUEROS, M., BADILLO, E., Y RUBIO, N. (2012). What is a Mathematical object? Looking to objects from two theoretical perspectives: APOS and OSA. *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seul, Corea.

FONT, V., BADILLO, E., TRIGUEROS, M., Y RUBIO, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa et al. (Eds.), *Actas del XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 239-247). Jaen, España [ISBN: 978-84-695-4466-2]

FONT, V., BOLITE, J. Y ACEVEDO, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, 75(*2*),131–152.

FONT, V. Y CONTRERAS, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(*1*), 33-52.

FONT, V., PLANAS, N. Y GODINO, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(*1*), 89-105.

FONT, V., MONTIEL, M., VIDAKOVIC, D. Y WILHELMI, M.R. (2010). Dimensional Analogy and Different Coordinate Systems through the Lens of Three Different Theoretical Perspectives. In R. NATA (Ed), *Progress in Education, Volume 19.* New York, NY: Nova Publishers,.

GARCÍA, M., GAVILÁN, J. M., Y LLINARES, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias,* 30(*3*), 219-235.

GARCÍA, M., LLINARES, S. Y SÁNCHEZ-MATAMORO, G. (2011). Characterizing Thematized Derivative Schema by the Underlying Emergent Structures. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9, 1023-1045.

GAVILÁN, J.M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

GAVILÁN, J. M., GARCÍA, M. M. Y LLINARES, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(*2*), 157-170.

GAVILÁN, J.M.; GARCÍA, M. Y LLINARES, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática,* 19(*2*), 5-39.

GODINO, J. D., BATANERO, C. Y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (*1-2*): 127-135.

GONZÁLEZ, M. Y ALDANA, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la Teoría APOE. *Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Baeza: Publicación del grupo de didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM.

MALASPINA, U. Y FONT, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*. 75(*1*), 107-130.

McDONALD, M.A., MATHEWS, D.M., y STROBEL, K.H. (2000). Understanding Sequences: A tale of two Objets. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 77-100.

PIAGET, J. Y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias.* México D.F.: Editorial Siglo XXI (4ª edición).

PINO-FAN, L., GODINO, J. D. Y FONT, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(*1*), 141-178.

POCHULU, M. Y FONT, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 14 *(3)*, 361-394.

ROA-FUENTES, S. Y OKTAÇ, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (*1*), 89-112.

ROBLES, M. G., DEL CASTILLO, A. G. Y FONT, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática,* 24 (*1*), 5-41.

ROBLES, M. G., TELECHEA, E. Y FONT, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26(2), 69-109.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. M. (2004). *Análisis de la Comprensión en los Alumnos de Bachillerato y Primer año de Universidad sobre la Noción de Derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.

SÁNCHEZ-MATAMORO, G., GARCÍA, M. M. Y LLINARES, S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias,* 18, (3), 355-368.

SÁNCHEZ-MATAMORO, G., GARCÍA, M. M. Y LLINARES, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. *Investigación en educación matemàtica XI*, 229-238.

SÁNCHEZ- MATAMORO, G.; GARCÍA, M. Y LLINARES, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *RELIME. Revista latioamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(*2*), 267-296.

TALL, D. (1999.) Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, 1, 111–118.*

TRIGUEROS, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática, 17 (1),* 5-31.

TRIGUEROS M. Y MARTÍNEZ-PLANELL, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics,* 73 (*1*), 3-19.

VARGAS, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

WELLER, K., MONTGOMERY, A., CLARK, J., COTTRILL, J., TRIGUEROS, M, ARNON, I., Y DUBINSKY, E. (2002). *Learning Linear Algebra with isetl*, disponible en: http://pc75666. math.cwu.edu/~montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf y http://homepages. ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

WITTGENSTEIN, L. (1953). *Philosophical investigations*. New York: The MacMillan Company.

WITTGENSTEIN, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.