

### CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

*Cada pregunta de la 1 a 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.*

*Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno/a.*

### OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNO DE LOS DOS BLOQUES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DEL MISMO.

---

#### BLOQUE A

##### Pregunta 1A

Una empresa familiar tiene tres empleados que trabajan como máximo durante 40 horas semanales cada uno en la elaboración de dos tipos de productos, A y B, Para la elaboración de una unidad de cada producto se requieren 3 horas para el tipo A y 4 horas para el B. La familia ha decidido que no se elaborarán más de 32 unidades semanales del producto tipo A y 12 del producto tipo B. El beneficio proporcionado por cada unidad del producto tipo A es de 6 euros y 3 euros por cada unidad del tipo B. Determina el número de unidades que deben elaborar del tipo A y B para obtener un beneficio máximo.

##### Pregunta 2A

En una empresa, el coste  $C(x)$  de un artículo se calcula a partir de la cantidad  $x$  de producto que se pide cada vez que la empresa se queda sin él. Dicho coste viene expresado por la función  $C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$ . ¿Cuál es la cantidad del producto  $x$  que minimiza el coste para la empresa?

##### Pregunta 3A

Las especificaciones de un fabricante de botes de pintura dicen que el peso de los botes sigue una distribución normal de media 1 kg de pintura y una desviación estándar de 0,1 kg.

- ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 botes?
- Se ha comprado un lote del que se ha tomado una muestra de 20 botes y en el que la media de los pesos obtenidos es de 0,98 kg, Construye un intervalo de confianza del 95% para la media.

**Pregunta 4A**

**Se tira tres veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos 2 caras seguidas?**

## BLOQUE B

### Pregunta 1B

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y sea  $B = (-1 \ -1 \ 1)$ .

- Calcula el producto  $BA$  y  $AB^t$  ( $B^t$  es la matriz traspuesta de  $B$ ).
- Escribe y resuelve el sistema homogéneo cuya matriz es  $A$ .

### Pregunta 2B

- Representa gráficamente las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2x - x^2$ .
- Comprueba que estas funciones dividen al cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$  en tres regiones de la misma área.

### Pregunta 3B

En un examen realizado a un grupo de alumnos, tres han obtenido la calificación más alta. Como sólo se puede dar una matrícula de honor, deciden que ésta será para aquel que saque la bola blanca de una bolsa que contiene dos bolas negras y una blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. ¿Quién tiene más probabilidad de sacar la bola blanca: el primero, el segundo o el último?

### Pregunta 4B

En una oposición, en la que participan miles de candidatos, se hizo un examen tipo test. Las calificaciones se distribuyeron normalmente con media  $m = 70$  puntos y desviación típica  $s = 10$ . ¿Cuál es la probabilidad de que tomada una muestra al azar de 100 opositores, se obtenga una calificación media superior a 72 puntos?

## Solución a las preguntas del Bloque A

### Pregunta 1A:

Sean  $x$  e  $y$  el número de unidades que debe elaborar de cada tipo, A y B, respectivamente.

Entonces, se trata de maximizar  $B(x, y) = 6x + 3y$

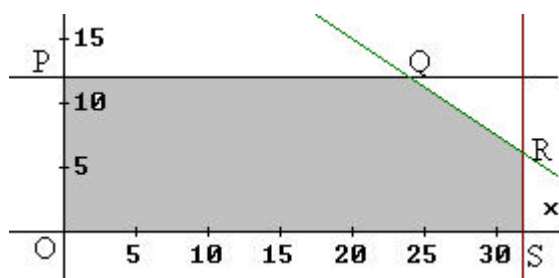
restringido por:  $3x + 4y \leq 120$  (número de horas disponibles)

$$x \leq 32$$

$$y \leq 12$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Como sabemos, la solución óptima se encuentra en alguno de los vértices; sus coordenadas son:

$$O = (0, 0), \quad P = (0, 12), \quad Q: \begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ y = 12 \end{cases} \Rightarrow Q = (24, 12),$$

$$R: \begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ x = 32 \end{cases} \Rightarrow R = (32, 6), \quad S = (32, 0).$$

El beneficio en cada uno de esos vértices es:

$$\text{En } O, \quad B(0, 0) = 0.$$

$$\text{En } P, \quad B(0, 12) = 36$$

$$\text{En } Q, \quad B(24, 12) = 180$$

$$\text{En } R, \quad B(32, 6) = 210$$

$$\text{En } S, \quad B(32, 0) = 192$$

El beneficio máximo se obtiene elaborando 32 unidades del tipo A y 6 del tipo B.

**Pregunta 2A:**

El mínimo de  $C(x)$  se da en las soluciones de  $C'(x) = 0$ , que cumplan que  $C''(x) > 0$ .

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400 \Rightarrow C'(x) = \frac{-200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm 20$$

$$C''(x) = \frac{400}{x^3}.$$

Como  $C''(20) = 0,05 > 0$ , para  $x = 20$  se da el mínimo de  $C(x)$ . (La solución  $x = 0$  carece de sentido).

**Pregunta 3A:**

a) La distribución de la media muestral de tamaño  $n$  obtenidas en una población de media  $m$  y desviación típica  $s$ ,  $N(m, s)$ , se distribuye según una normal  $N\left(m, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ .

En nuestro caso:

$$\text{Población: } N(1, 0,1). \quad \text{Media muestral: } N\left(1, \frac{0,1}{\sqrt{20}}\right) \approx N(1, 0,022)$$

b) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral  $n$  de media  $\bar{x}$ , es:

$$\left( \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo  $\sigma$  la desviación típica poblacional y  $Z_{\alpha/2}$  el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de  $1 - \alpha$ .

En este caso:  $\bar{x} = 0,98$ ,  $\sigma = 0,1$ ,  $n = 20$  y, para el 95% de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 1,96$ .

El intervalo pedido es:

$$\left( 0,98 - 1,96 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{20}}, 0,98 + 1,96 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{20}} \right) \approx (0,937, 1,023)$$

**Pregunta 4A:**

Sea C el suceso cara y X el suceso cruz.

El espacio muestral es

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

El suceso “al menos dos caras seguidas” esta formado por  $\{CCC, CCX, XCC\}$ .

Como todos los sucesos elementales son equiprobables, la

$$P(\text{“al menos dos caras seguidas”}) = \frac{3}{8}$$